

Глава 7

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ

§ 7.1. Вводные замечания

В главах, посвященных реле и релаксационным генераторам, было показано, что состояния равновесия бывают устойчивыми и неустойчивыми. Там же были рассмотрены условия устойчивости для простейших случаев. В этой главе рассматриваются некоторые общие методы определения устойчивости равновесия электрических схем, применяемых в радиотехнике. Эти методы особенно широко используются при анализе генераторов, усилителей с обратной связью и автоматических регуляторов.

Состоянием равновесия схемы назовем такой ее режим, при котором токи и напряжения в схеме *постоянны*. Состояние равновесия схемы назовем *устойчивым*, если достаточно малые собственные колебания в схеме вблизи равновесия всегда являются *затухающими*, и *неустойчивым*, если эти колебания могут быть нарастающими. Случай, когда амплитуда собственных колебаний постоянна — колебания не нарастают и не затухают, является граничным, и без большого ущерба для практики его можно не рассматривать.

Академиком А.М. Ляпуновым доказано, что *равновесие в нелинейной системе устойчиво*, если оно *устойчиво в некоторой линейной системе*, которая в нашем случае является линейной схемой замещения нелинейной схемы (см. § 3.1) для режима, соответствующего равновесию, и *неустойчиво*, если оно *неустойчиво в этой линейной схеме*. Это положение становится понятным, если учесть, что устойчивость равновесия определяется по малым собственным колебаниям, для которых линейная схема замещения справедлива до бесконечно малых первого порядка.

Схемы и их режимы, в которых равновесие устойчиво, для краткости назовем *устойчивыми* схемами и режимами, а схемы и режимы, в которых равновесие неустойчиво, — *неустойчивыми*. Режим, соответствующий неустойчивому равновесию, сохраняться сколь-нибудь долго не может, так как всегда найдутся причины, вызывающие небольшие собственные колебания в схеме. Как бы малы эти колебания ни были, они при неустойчивом равновесии нарастают, и схема выходит из режима равновесия. Режим, соответствующий устойчивому

равновесию, может сохраняться сколь угодно долго. Однако при достаточно сильных воздействиях схема может выйти из этого режима и перейти в другой режим равновесия (см., например, § 4.2) или в режим незатухающих колебаний, как это будет показано в § 12.3.

Для определения устойчивости обычно заменяют в исследуемой схеме нелинейные сопротивления линейными схемами замещения. В линейных схемах с постоянными положительными параметрами r , C , L равновесие всегда устойчиво. Поэтому исследование устойчивости обычно необходимо лишь в схемах, содержащих отрицательные сопротивления или имеющих обратную связь.

§ 7.2. Комплексный метод составления характеристических уравнений

Свободные колебания в линейных схемах с постоянными параметрами состоят из суммы составляющих, имеющих вид

$$B_k e^{\gamma_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (7.1)$$

В частном случае ω_k может равняться нулю, и тогда составляющая (7.1) собственных колебаний будет аperiodической.

Величина γ_k является относительной скоростью изменения амплитуды колебаний (7.1), которая была введена в § 6.3 первой части курса.

Действительно,

$$\frac{1}{B_k e^{\gamma_k t}} \cdot \frac{d(B_k e^{\gamma_k t})}{dt} = \gamma_k.$$

Выясним соотношения между током и напряжением для катушки индуктивности при колебаниях вида (7.1).

Пусть ток, текущий через индуктивность, равен

$$i_L = B e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Тогда напряжение на катушке равно

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_L}{dt} = L[B\gamma e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) - B\omega e^{\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)] = \\ &= \gamma L B e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) + \omega L B e^{\gamma t} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

или в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_L &= B e^{\gamma t} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{U}_L &= \gamma L B e^{\gamma t} e^{i\varphi} + \omega L B e^{\gamma t} e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \\ &= \gamma L \mathbf{I}_L + i\omega L \mathbf{I}_L = (\gamma + i\omega) L \mathbf{I}_L = p L \mathbf{I}_L. \end{aligned}$$

где $p = \gamma + i\omega$.

Решая эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{A}_{11}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{A}_{12}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_2 + \dots + \frac{\mathbf{A}_{1n}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_n, \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{\mathbf{A}_{21}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{A}_{22}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_2 + \dots + \frac{\mathbf{A}_{2n}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{I}_n &= \frac{\mathbf{A}_{n1}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{A}_{n2}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_2 + \dots + \frac{\mathbf{A}_{nn}}{\Delta(p)} \mathbf{E}_n, \end{aligned}$$

где

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11}(p) & \mathbf{Z}_{12}(p) & \dots & \mathbf{Z}_{1n}(p) \\ \mathbf{Z}_{21}(p) & \mathbf{Z}_{22}(p) & \dots & \mathbf{Z}_{2n}(p) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \mathbf{Z}_{n1}(p) & \mathbf{Z}_{n2}(p) & \dots & \mathbf{Z}_{nn}(p) \end{vmatrix}, \quad (7.3)$$

\mathbf{A}_{kl} — алгебраическое дополнение члена $\mathbf{Z}_{kl}(p)$ определителя $\Delta(p)$.

При собственных колебаниях $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \dots = \mathbf{E}_n = 0$ ¹⁾, но $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$ не равны нулю. Это может быть лишь в том случае, если

$$\Delta(p) = 0. \quad (7.4)$$

Следовательно, γ и ω собственных колебаний должны быть такими, чтобы удовлетворялось уравнение (7.4).

Корни $p = \gamma + i\omega$, в которых $\omega < 0$, соответствуют также колебаниям вида (7.1), поскольку знак аргумента косинуса всегда можно заменить на противоположный.

Уравнение (7.4) и последующие уравнения, корни которых определяют γ и ω собственных колебаний, называются *характеристическими*.

Схема устойчива, если действительные части всех корней уравнения (7.4), т.е. все γ_k , отрицательны, и неустойчива, если действительная часть хотя бы одного из корней положительна.

Часто приходится исследовать устойчивость усилителя, зная выражение для его коэффициента усиления при достаточно малых колебаниях:

$$\mathbf{K}(p) = \frac{\mathbf{U}_{вых}}{\mathbf{U}_{вх}}, \quad (7.5)$$

где $p = i\omega$ — при синусоидальных колебаниях, $p = \gamma + i\omega$ при колебаниях вида (7.1), $\mathbf{U}_{вх}$ — комплексная амплитуда напряжения на входе, $\mathbf{U}_{вых}$ — комплексная амплитуда напряжения на выходе.

¹⁾ В схемах замещения управляемых нелинейных сопротивлений эдс при собственных колебаниях могут не быть равными нулю, но они линейно выражаются через $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$, и их выражения следует перенести в левые части равенств (7.2). Тогда правые части этих равенств обращаются в нуль.

Если на вход усилителя напряжение не подается, то $U_{вх} = 0$, а $U_{вых}$ определяется собственными колебаниями. При этом на основании (7.5) характеристическое уравнение будет следующим:

$$K(p) = \frac{U_{вых}}{0} = \infty. \quad (7.6)$$

Корни этого уравнения определяют параметры собственных колебаний в усилителе и позволяют судить об его устойчивости.

Если усилитель замкнуть обратной связью, то $U_{вых} = U_{вх}$, и при собственных колебаниях должно удовлетворяться характеристическое уравнение:

$$K(p) = 1. \quad (7.7)$$

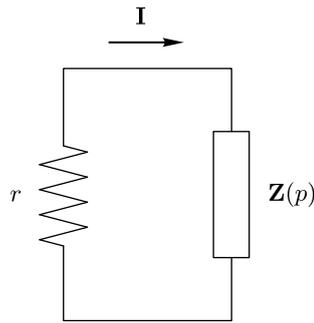


Рис. 7.1

В ряде случаев необходимо определить устойчивость схем, содержащих отрицательные сопротивления. Такие схемы можно привести к виду, изображенному на рис. 7.1, где $r < 0$.

При собственных колебаниях в этой схеме

$$Ir + IZ(p) = 0,$$

и поэтому характеристическое уравнение будет следующим:

$$Z(p) = -r. \quad (7.8)$$

Перечисленные примеры не охватывают всех способов получения характеристических уравнений, но дают представление о методах их составления.

Уравнения, полученные в этом параграфе и используемые для определения устойчивости, бывают высоких порядков, и их решение оказывается затруднительным. В следующих параграфах рассматриваются основные методы, позволяющие иметь суждение о знаках действительных частей корней и, таким образом, судить об устойчивости схемы, не решая характеристического уравнения.

Пример 7.1

Определить, при какой величине емкости C в схеме релаксационного генератора, изображенной на рис. 5.1, будет устойчивое равновесие и генератор перестанет самовозбуждаться.

Решение

При равновесии в схеме рис. 5.1 напряжение на входе усилителя равно E_1 . Для малых колебаний и разорванной цепи обратной связи верна схема замещения, изображенная на рис. 7.2.

Здесь U_1 — напряжение малых колебаний на входе усилителя, K_0 — коэффициент усиления усилителя, соответствующий режиму равновесия, т. е.

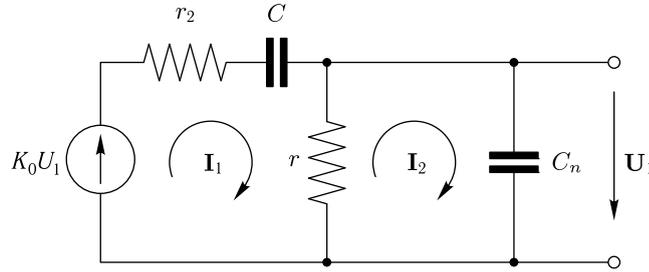


Рис. 7.2

$u_1 = E_1$, r_2 — выходное сопротивление усилителя в режиме равновесия. Составим для схемы рис. 7.2 уравнения Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \left(r_2 + \frac{1}{pC} + r \right) \mathbf{I}_1 - r \mathbf{I}_2 &= K_0 \mathbf{U}_1 = K_0 \frac{1}{pC_{\Pi}} \cdot \mathbf{I}_2; \\ -r \mathbf{I}_1 + \left(r + \frac{1}{pC_{\Pi}} \right) \mathbf{I}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Перенесем член, содержащий \mathbf{I}_2 , из правой части первого уравнения в левую и напишем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \begin{vmatrix} r_2 + \frac{1}{pC} + r & -r - K_0 \frac{1}{pC_{\Pi}} \\ -r & r + \frac{1}{pC_{\Pi}} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{p^2 r r_2 C C_{\Pi} + p(r C_{\Pi} + r_2 C + r C - K_0 r C) + 1}{p^2 C C_{\Pi}} = 0. \end{aligned}$$

Приравняв числитель нулю и решая полученное уравнение, найдем условие, при котором корни имеют отрицательные действительные части:

$$r C_{\Pi} + r_2 C + r C - K_0 r C > 0,$$

откуда при $r(K_0 - 1) - r_2 > 0$

$$C < \frac{r C_{\Pi}}{r(K_0 - 1) - r_2}.$$

Пример 7.2

Составить характеристическое уравнение релаксационного генератора (рис. 6.16) для рабочей точки a (рис. 6.17).

Решение

Для малых колебаний верна схема замещения, изображенная на рис. 7.3. Здесь $r_i = \frac{1}{di/du} < 0$ в рабочей точке a (рис. 6.17). Сравнивая рис. 7.3 с рис. 7.1, сразу записываем для него характеристическое уравнение вида (7.8), везде ставя p вместо $i\omega$:

$$\mathbf{Z}(p) = \frac{\frac{1}{pC_{\Pi}}(r + pL)}{\frac{1}{pC_{\Pi}} + r + pL} = \frac{r + pL}{1 + prC_{\Pi} + p^2 LC_{\Pi}} = -r_i.$$

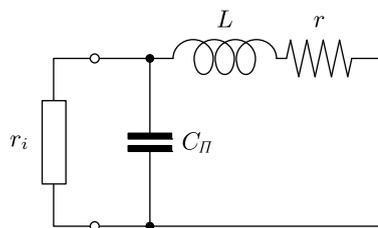


Рис. 7.3

Умножая обе части равенства на знаменатель и перенося все члены в одну сторону, получил:

$$p^2 r_i L C_{\Pi} + p(r r_i C_{\Pi} + L) + r + r_i = 0.$$

Анализ корней этого уравнения может быть произведен обычным способом.

Пример 7.3

Составить характеристическое уравнение для усилителя, рис. 7.4, замкнутого обратной связью. Паразитные емкости не учитывать.

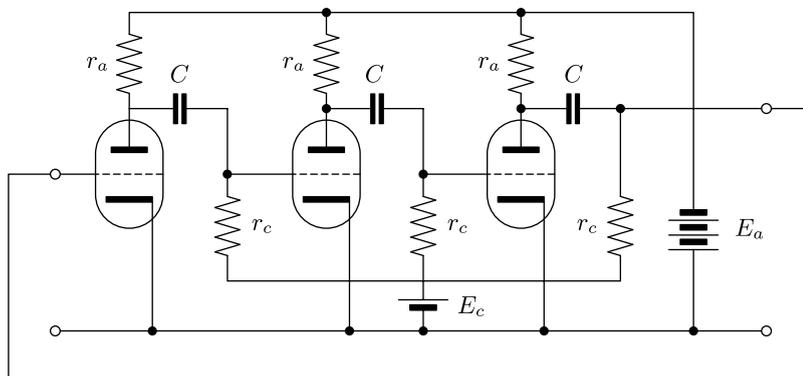


Рис. 7.4

Решение

Коэффициент усиления одной ступени такого усилителя определяется ф-лой (3.16). Поэтому характеристическое уравнение вида (7.7) для трехступенного усилителя, замкнутого обратной связью, будет следующим:

$$\mathbf{K}(p) = \left(\frac{K_{cp}}{1 + \frac{1}{p\tau_n}} \right)^3 = \frac{-|K_{cp}^3| p^3 \tau_n^3}{p^3 \tau_n^3 + 3p^2 \tau_n^2 + 3p\tau_n + 1} = 1,$$

где $K_{cp} = -|K_{cp}|$ — отрицательная постоянная.

Умножая обе части уравнения на знаменатель левой части и перенося все члены в левую сторону, получим:

$$p^3 (1 + |K_{cp}^3|) \tau_n^3 + p^2 3\tau_n^2 + p 3\tau_n + 1 = 0.$$

Анализировать корни этого уравнения путем его решения затруднительно. Более простые методы анализа будут изложены в следующих параграфах (см. примеры 7.5 и 7.7).

§ 7.3. Критерий Рауса–Гурвица

Критерий Рауса–Гурвица может быть сформулирован так: «Уравнение

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (7.9)$$

где a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 — действительные числа и $a_n > 0$, имеет отрицательные действительные части у всех корней тогда и только тогда, когда все главные миноры определителя $(n-1)$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (7.9a)$$

и свободный член a_0 положительны».

Главные миноры образуются отбрасыванием m нижних строк и m правых столбцов, где $m = 0, 1, 2, \dots, n-2$.

При $n = 5$, например, определитель будет следующим:

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

и условием критерия является одновременное выполнение неравенств:

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad a_4 > 0; \quad a_0 > 0.$$

В том случае, когда схемы состоят из цепей с сосредоточенными постоянными, уравнения, выведенные в предыдущем параграфе, сводятся к уравнениям вида (7.9) и устойчивость схем можно установить с помощью критерия Рауса–Гурвица.

Действительно, в этом случае ур-ние (7.4) может быть записано так:

$$\Delta(p) = \frac{\mathbf{M}(p)}{\mathbf{N}(p)} = 0. \quad (7.10)$$

Здесь и в дальнейшем в этом параграфе $\mathbf{M}(p)$ и $\mathbf{N}(p)$ — целые рациональные функции p вида (7.9).

Уравнение (7.10) сводится к уравнению:

$$\mathbf{M}(p) = 0, \quad (7.11)$$

имеющему вид (7.9).

Уравнение (7.6) может быть записано в форме:

$$\mathbf{K}(p) = \frac{\mathbf{M}(p)}{\mathbf{N}(p)} = \infty$$

и сводится к уравнению

$$\mathbf{N}(p) = 0, \quad (7.12)$$

также имеющему вид (7.9).

Наконец, ур-ния (7.7) и (7.8) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{M}(p)}{\mathbf{N}(p)} = \mathbf{A} = \text{const},$$

откуда

$$\mathbf{M}(p) - \mathbf{A}\mathbf{N}(p) = 0. \quad (7.13)$$

Правая часть этого равенства — целая рациональная функция вида (7.9), поскольку $\mathbf{M}(p)$ и $\mathbf{N}(p)$ являются такими функциями.

Таким образом, для систем с сосредоточенными постоянными все уравнения, выведенные в предыдущем параграфе, сводятся к ур-ниям вида (7.9), и соответствующие им схемы устойчивы, если эти уравнения удовлетворяют критерию Рауса–Гурвица.

Пример 7.4

Найти условия устойчивости схемы рис. 6.16 с помощью критерия Рауса–Гурвица.

Решение

Характеристическое уравнение берем из примера 7.2. Для того, чтобы применить к нему критерий Рауса–Гурвица, надо иметь $a_n > 0$. В данном случае $r_i > 0$. Поэтому заменяем r_i на $-|r_i|$ и умножаем всё уравнение на (-1) . Получим:

$$p^2|r_i|LC_{II} + p(|r_i|rC_{II} - L) + |r_i| - r = 0.$$

Поскольку в данном случае $n = 2$, определитель этого уравнения вида (7.9а) равен a_1 , и условие устойчивости запишется так:

$$a_1 = |r_i|rC_{II} - L > 0,$$

$$a_0 = |r_i| - r > 0$$

или

$$L < |r_i|rC_{II},$$

$$r < |r_i|.$$

В § 6.4 из качественных соображений указывалось, что при малых L из-за наличия C_{II} генерация прекращается. Здесь мы получили количественную величину предельного значения L .

Пример 7.5

Найти условия устойчивости усилителя, изображенного на рис. 7.4, замкнутого обратной связью.

Решение

Характеристическое уравнение берем из примера 7.3. На основании критерия Рауса–Гурвица усилитель будет устойчивым, если одновременно выполняются условия:

1. $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\tau_n^2 & (1 + |K_{cp}|)\tau_n^3 \\ 1 & 3\tau_n \end{vmatrix} = 8\tau_n^3 - |K_{cp}|\tau_n^3 > 0.$
2. $|a_2| = a_2 = 3\tau_n^2 > 0.$
3. $a_0 = 1 > 0.$

Очевидно, что второе и третье условия выполняются всегда. Из первого условия после сокращения на τ_n^3 (τ_n^3 всегда больше нуля) получим:

$$|K_{cp}| < \sqrt[3]{8} = 2.$$

Таким образом, пока $|K_{cp}|$ достаточно мало, усилитель устойчив.

§ 7.4. Метод амплитудно-фазовых характеристик

В тех случаях, когда характеристические уравнения не выражаются целыми рациональными дробями (как например, в схемах, содержащих распределенные емкости и индуктивности), критерий Рауса–Гурвица неприменим. В этом случае, а также в ряде других, оказывается удобным использовать метод амплитудно-фазовых характеристик.

Амплитудно-фазовой характеристикой функции $\mathbf{K}(i\omega)$ называют кривую на комплексной плоскости, описываемую концом радиус-вектора $\mathbf{K}(i\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Эта кривая изображает в полярных координатах зависимость модуля функции (как бы амплитуды) $\mathbf{K}(i\omega)$ от ее аргумента (как бы сдвига фаз).

Назовем *обобщенной амплитудно-фазовой характеристикой $\mathbf{K}(p)$ линию $\mathbf{K}(\gamma + i\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ и $\gamma = \text{const}$.* Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика $\mathbf{K}(i\omega)$ является частным случаем обобщенной амплитудно-фазовой характеристики $\mathbf{K}(p)$ при $\gamma = 0$.

Направлением этих характеристик считаем направление движения по ним радиус-вектора при увеличении ω .

Посмотрим, как перемещается обобщенная амплитудно-фазовая характеристика при изменении γ .

При увеличении γ на $d\gamma$ и $\omega = \text{const}$ точка характеристики $\mathbf{K}(\gamma + i\omega)$ сместится на величину:

$$d\mathbf{K}_\gamma = \frac{\partial \mathbf{K}(\gamma + i\omega)}{\partial \gamma} d\gamma = \frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} d\gamma = \frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p} \cdot d\gamma.$$

При увеличении ω на $d\omega$ и $\gamma = \text{const}$ эта точка сместится на величину:

$$d\mathbf{K}_\omega = \frac{\partial \mathbf{K}(\gamma + i\omega)}{\partial \omega} d\omega = \frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p} i d\omega.$$

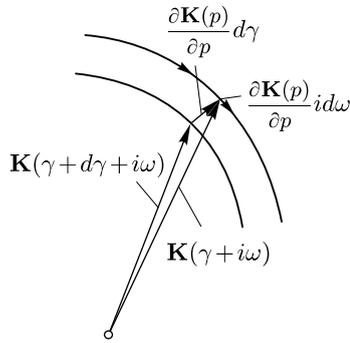


Рис. 7.5

Вектор $d\mathbf{K}_\omega$, определяющий смещение точки при увеличении ω , должен совпадать с направлением обобщенной амплитудно-фазовой характеристики. Вектор $d\mathbf{K}_\gamma$, определяющий смещение точки характеристики при увеличении γ , отличается от вектора $d\mathbf{K}_\omega$ множителем i и поэтому будет перпендикулярен к направлению обобщенной амплитудно-фазовой характеристики и идти от него вправо (рис. 7.5), поскольку умножение на i равносильно повороту вектора на 90° влево.

Таким образом, точки обобщенной амплитудно-фазовой характеристики при увеличении γ должны смещаться вправо по отношению к ее направлению.

Теперь сформулируем критерий пересечений.

«Пусть $\mathbf{K}(P)$ — непрерывная однозначная функция комплексного переменного p , причем $\mathbf{K}(p) \rightarrow \mathbf{D}$ при $|p| \rightarrow \infty$.

Тогда

$$n_A - n_B = n_\alpha - n_\beta, \quad (7.14)$$

где n_A — число корней с положительной действительной частью уравнения:

$$\mathbf{K}(p) = \mathbf{A}, \quad (7.15)$$

n_B — то же, но уравнения

$$\mathbf{K}(p) = \mathbf{B}, \quad (7.16)$$

n_α — число пересечений амплитудно-фазовой характеристикой $\mathbf{K}(i\omega)$ отрезка \mathbf{AB} слева направо (если смотреть от \mathbf{A} к \mathbf{B}), n_β — то же, но справа налево.

Отрезок \mathbf{AB} соединяет точки комплексной плоскости, соответствующие величинам \mathbf{A} и \mathbf{B} . Предполагается, что точки \mathbf{A} и \mathbf{B} не лежат на амплитудно-фазовой характеристике, а точка \mathbf{D} не лежит на отрезке \mathbf{AB} .

Заметим, что:

1) если последнее предположение не удовлетворяется, то следует сместить точку \mathbf{A} или \mathbf{B} , или отрезок \mathbf{AB} на бесконечно малую величину, чтобы оно удовлетворилось;

2) точка **A** будет лежать на амплитудно-фазовой характеристике тогда и только тогда, когда уравнение $\mathbf{K}(p) = \mathbf{A}$ имеет корень с действительной частью, равной нулю, поскольку в этом случае $\mathbf{K}(i\omega) = \mathbf{A}$. Аналогичное положение справедливо и для точки **B**.

Рисунок 7.6 иллюстрирует приведенную выше формулировку критерия пересечений. Для рис. 7.6а $n_\alpha = n_\beta = 2$; для рис. 7.6б $n_\alpha = 2$; $n_\beta = 1$.

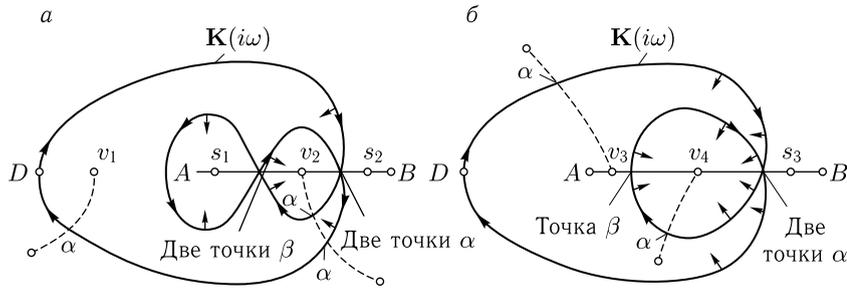


Рис. 7.6

Перейдем к доказательству критерия. Будем перемещаться по отрезку **AB** от **A** к **B**. Попадающиеся при этом точки пересечения отрезка с обобщенной амплитудно-фазовой характеристикой $\mathbf{K}(p)$ назовем точками α , если характеристика пересекает в них отрезок слева направо, и точками β , если справа налево (рис. 7.6). Если m пересечений происходит в одной точке, то такую точку считаем наложением m различных точек α или β .

При $\gamma = 0$ обобщенная амплитудно-фазовая характеристика превратится в амплитудно-фазовую характеристику $\mathbf{K}(i\omega)$ и число точек α на отрезке **AB** в соответствии с принятым в критерии обозначением будет равно n_α , число точек $\beta - n_\beta$.

При $\gamma = \infty$ имеем $|p| = \infty$ и $\mathbf{K}(p) = \mathbf{D}$. В этом случае вся обобщенная амплитудно-фазовая характеристика соберется в точку **D** и на отрезке **AB** точек α и β не останется, поскольку точка **D** на нем не лежит.

Исследуем, как могут появляться и исчезать точки α и β на отрезке **AB** при непрерывном изменении γ от нуля до бесконечности. При этом изменении γ в соответствии с установленным выше характером движения обобщенной амплитудно-фазовой характеристики точки α обязаны двигаться только в направлении от **B** к **A** (см. рис. 7.6, где движение характеристики показано пунктирными стрелками). Поэтому через границу **A** они могут лишь уходить с отрезка **AB**. Пусть так уйдет $n_{A\alpha}$ точек α . Через границу **B** точки α в этом случае могут только прибывать на отрезок **AB**. Пусть число прибывших таким образом точек α равно $n_{B\alpha}$. Следовательно, число точек α , которые должны

уйти с отрезка, не проходя его границ, должно быть равно

$$n_\alpha - n_{A\alpha} + n_{B\alpha}, \quad (7.17)$$

поскольку при $\gamma = \infty$ таких точек не должно остаться.

Совершенно аналогично при изменении γ от 0 до ∞ точки β могут двигаться только в направлении от **A** к **B**. Поэтому через границу **A** точки β могут только прибывать на отрезок (пусть число прибывших этим путем точек β равно $n_{A\beta}$), а через границу **B** только убывать с отрезка (пусть число убывших этим путем точек β равно $n_{B\beta}$). Следовательно, число точек β , которые должны уйти с отрезка, не переходя его границ, равно

$$n_\beta - n_{B\beta} + n_{A\beta}. \quad (7.18)$$

Выясним, как точки α и β могут появляться и исчезать с отрезка **AB**, не переходя его границ. Обобщенная амплитудно-фазовая характеристика является непрерывной линией, так как $\mathbf{K}(p)$ — непрерывная функция и концы этой линии, т. е. точки $\mathbf{K}(\gamma + i\infty)$ и $\mathbf{K}(\gamma - i\infty)$ «закреплены» в точке **D**, не лежащей на отрезке. Поэтому увеличение или уменьшение числа точек α и β на отрезке **AB** без их перехода через границы отрезка может произойти лишь путем надвигания обобщенной амплитудно-фазовой характеристики петель на отрезок **AB** или сползания ее также петель с этого отрезка (рис. 7.7). При этом число появляющихся или исчезающих точек α должно равняться числу появляющихся или исчезающих точек β .

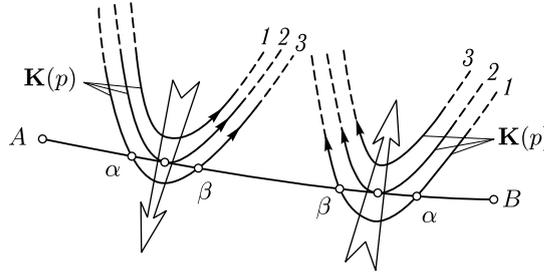


Рис. 7.7

Таким образом, точки α и β смогут полностью покинуть отрезок **AB** при $\gamma = \infty$, лишь если оставшееся число (7.17) точек α равно оставшемуся числу (7.18) точек β , т. е. если

$$n_\alpha - n_{A\alpha} = n_{B\alpha} = n_\beta - n_{B\beta} + n_{A\beta},$$

откуда

$$n_\alpha - n_\beta = n_{A\alpha} + n_{A\beta} - (n_{B\alpha} + n_{B\beta}). \quad (7.19)$$

Число $n_{A\alpha} + n_{A\beta}$ равно числу точек α и β , прошедших точку **A** при изменении γ от 0 до ∞ . Каждый раз, когда при $\gamma > 0$ точка α или β проходит через точку **A**, удовлетворяется уравнение (7.15), причем

действительная часть корня, т. е. величина γ , положительна. Следовательно,

$$n_{A\alpha} + n_{A\beta} = n_A, \quad (7.20)$$

т. е. равно числу корней ур-ния (7.15) с положительными действительными частями.

Аналогично

$$n_{B\alpha} + n_{B\beta} = n_B, \quad (7.21)$$

т. е. равно числу корней ур-ния (7.16) с положительной действительной частью.

Из равенств (7.19), (7.20), (7.21) получаем

$$n_\alpha - n_\beta = n_A - n_B,$$

что доказывает критерий.

Рассмотрим ряд примеров использования доказанного критерия в весьма важном для радиотехники вопросе об устойчивости усилителей.

Пусть $\mathbf{K}(p)$ — коэффициент усиления усилителя при разомкнутой обратной связи, причем удовлетворяются условия критерия пересечений.

С помощью критерия пересечений можно, зная число корней с положительной действительной частью n_B уравнения $\mathbf{K}(p) = \mathbf{B}$, при некотором \mathbf{B} , и изображение амплитудно-фазовой характеристики $\mathbf{K}(i\omega)$, найти число таких корней уравнения $\mathbf{K}(p) = \mathbf{A}$ при любом \mathbf{A} . Оно на основании (7.14) равно:

$$n_A = n_\alpha - n_\beta + n_B. \quad (7.22)$$

Часто бывает известно, что усилитель с разомкнутой обратной связью устойчив. В этом случае характеристическое ур-ние (7.6): $\mathbf{K}(p) = \infty$ должно в соответствии с § 7.2 иметь только корни с отрицательной действительной частью. Беря $\mathbf{B} = \infty$, получим $n_B = 0$. При этом число корней с положительной действительной частью у характеристического ур-ния (7.7): $\mathbf{K}(p) = \mathbf{A} = 1$ для этого усилителя с замкнутой обратной связью равно $n_A = n_\alpha - n_\beta$.

Таким образом, если в этом случае на отрезке ($\mathbf{A} = +1, \mathbf{B} = +\infty$) величина $n_\alpha = n_\beta$ ¹⁾, то $n_A = 0$, и усилитель с замкнутой обратной связью в соответствии с § 7.2 устойчив; если $n_\alpha \neq n_\beta$, то $n_A \neq 0$ и усилитель неустойчив. Он неустойчив и в том случае, когда общее число пересечений отрезка ($\mathbf{A} = +1, \mathbf{B} = +\infty$) амплитудно-фазовой характеристикой $n_\alpha + n_\beta$ нечетно, независимо от того, какие это пересечения — типа α или типа β , поскольку при этом величина n_α не может равняться n_β . Последнее соображение позволяет часто упростить анализ.

¹⁾ Отметим, что при этом может быть $n_\alpha = n_\beta = 0$.

Проиллюстрируем сказанное. Если устойчивый с разомкнутой обратной связью усилитель имеет амплитудно-фазовые характеристики $\mathbf{K}(i\omega)$, соответствующие рис. 7.6, и если точка $(+1)$ будет занимать положения s_1, s_2 или s_3 , то усилитель устойчив и с замкнутой обратной связью. Наоборот, если точка $(+1)$ будет занимать положения v_1, v_2, v_3 или v_4 , то с замкнутой обратной связью усилитель неустойчив.

Иногда, учитывая, что n_B не может быть отрицательной величиной, можно судить о неустойчивости усилителя с замкнутой обратной связью, не зная его поведения с разомкнутой. Так, полагая $\mathbf{A} = 1$, мы получим, что n_A больше нуля и усилитель с замкнутой обратной связью неустойчив, если можно найти такую точку \mathbf{B} , при которой на отрезке $(\mathbf{A} = 1, \mathbf{B})$ величина n_α больше n_β . С помощью этого положения нетрудно установить неустойчивость усилителя с замкнутой обратной связью при амплитудно-фазовых характеристиках $\mathbf{K}(i\omega)$ рис. 7.6, ничего не зная об его поведении при разомкнутой обратной связи, в случае, если точка $(+1)$ занимает положения v_1, v_2, v_3 или v_4 , проведя показанные пунктиром на этом рисунке отрезки.

Иногда также можно установить по виду амплитудно-фазовой характеристики, что усилитель с разомкнутой обратной связью неустойчив. Характеристическое уравнение для этого случая имеет вид: $\mathbf{K}(p) = \infty$. Полагая $\mathbf{A} = \infty$, мы получим, что n_A больше нуля и усилитель с разомкнутой обратной связью неустойчив, если можно найти такую точку \mathbf{B} , при которой на отрезке (∞, \mathbf{B}) величина n_α больше n_β .

Примеры амплитудно-фазовых характеристик, на основании которых можно сказать, что соответствующий им усилитель неустойчив при разомкнутой обратной связи, изображены на рис. 7.8.

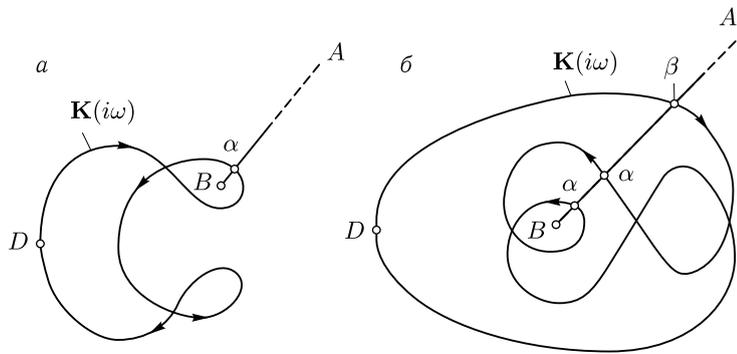


Рис. 7.8

Докажем с помощью критерия пересечений следующий критерий устойчивости усилителей с обратной связью.

«Если усилитель устойчив с разомкнутой обратной связью, и при $|p| \rightarrow \infty \mathbf{K}(p) \rightarrow 0$, то для того, чтобы он был устойчив при замыкании

обратной связи, необходимо и достаточно, чтобы точка $(+1)$ находилась вне замкнутой амплитудно-фазовой характеристики $\mathbf{K}(i\omega)$ ».

«Вне замкнутой амплитудно-фазовой характеристики» здесь означает, что всю амплитудно-фазовую характеристику можно, не разрывая, мысленно собрать в точку 0 без того, чтобы она пересекла точку $(+1)$.

Доказательство этого критерия состоит в следующем. Если точка $(+1)$ находится вне замкнутой амплитудно-фазовой характеристики, то последняя может охватывать эту точку лишь петлями или не охватывать совсем. Так будет, например, когда точка $(+1)$ занимает положения s_1 , s_2 или s_3 (рис. 7.6). В этом случае число пересечений амплитудно-фазовой характеристикой отрезка $(+1, \infty)$ в одну и другую сторону должно быть одинаково ($n_\alpha = n_\beta$) и согласно сказанному выше усилитель с замкнутой обратной связью устойчив.

Если точка $(+1)$ находится внутри замкнутой амплитудно-фазовой характеристики, то число пересечений отрезка $(+1, \infty)$ характеристикой в одну и другую сторону неодинаково ($n_\alpha \neq n_\beta$) и усилитель неустойчив. Так, например, будет, когда точка $(+1)$ занимает положения v_1 , v_2 , v_3 или v_4 (рис. 7.6).

Этот критерий является менее общим и в ряде случаев менее удобным, чем критерий пересечений, поскольку он требует, чтобы при $|p| \rightarrow \infty$ $\mathbf{K}(p) \rightarrow 0$ и чтобы усилитель был устойчив при разомкнутой обратной связи, что для применения критерия пересечений не всегда необходимо. Затем, критерий пересечений не требует построения всей амплитудно-фазовой характеристики, а требует лишь нахождения ее пересечений с отрезком \mathbf{AB} , что часто упрощает исследование.

Следует отметить одно важное обстоятельство, которое надо иметь в виду при исследованиях с амплитудно-фазовыми характеристиками. Если в некотором выражении все i заменить на $-i$, то это выражение превратится в сопряженное, т. е. его действительная часть останется без изменения, а мнимая изменит свой знак. Таким образом, $\mathbf{K}(i\omega)$ и $\mathbf{K}(-i\omega)$ должны быть сопряженными величинами, поскольку в них i входит только в аргумент. Поэтому часть амплитудно-фазовой характеристики, полученная при изменении ω от 0 до $-\infty$ (на рис. 7.6 и 7.8 изображена тонкой линией) и часть, полученная при изменении ω от нуля до $+\infty$ (изображена на этих рисунках жирной линией) оказываются симметричными относительно действительной оси. Исходя из этого, достаточно найти амплитудно-фазовую характеристику для $\omega > 0$.

Отсюда следует, что точка $\mathbf{K}(0)$ всегда лежит на действительной оси; если точка $\mathbf{K}(i\omega_1)$ лежит на действительной оси, то и точка $\mathbf{K}(-i\omega)$ должна лежать на этой оси.

Таким образом, если отрезок \mathbf{AB} совпадает с действительной осью, то все пересечения амплитудно-фазовой характеристики с ним при $\omega \neq 0$ являются двойными, причем оба пересечения такой пары будут либо оба типа α , либо оба типа β (см., например, рис. 7.6).

Все сказанное в этом параграфе относительно устойчивости усилителей применимо и к схеме рис. 7.1, для которой справедливо характеристическое уравнение (7.8).

В этом случае вместо точки $\mathbf{A} = +1$ нужно брать точку $\mathbf{A} = -r$, вместо амплитудно-фазовой характеристики $\mathbf{K}(i\omega)$ — амплитудно-фазовую характеристику $\mathbf{Z}(i\omega)$. Вместо уравнения $\mathbf{K}(p) = \infty$ будем иметь уравнение:

$$\mathbf{A}(p) = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \infty. \quad (7.23)$$

Это уравнение дает параметры собственных колебаний в схеме \mathbf{Z} , когда она отключена от сопротивления r . При этом ток \mathbf{I} , текущий от r в \mathbf{Z} , равен нулю, а напряжение \mathbf{U} на схеме \mathbf{Z} не равно нулю. Таким образом, вместо использовавшегося выше условия, что «усилитель, не замкнутый обратной связью, устойчив», здесь будет условие: «схема \mathbf{Z} отключенная от сопротивления r , устойчива».

Пример 7.6

Доказать, что любой усилитель постоянного напряжения, устойчивый при разомкнутой обратной связи, у которого из-за паразитных емкостей $|\mathbf{K}(i\omega)| \leq |\mathbf{K}(0)|$, при замкнутой обратной связи неустойчив при $\mathbf{K}(0) > 1$ и устойчив при $\mathbf{K}(0) < 1$. Это положение было доказано в § 4.2 для частного случая.

Решение

Выберем точку $\mathbf{A} = +1$, точку $\mathbf{B} = +\infty$ — отрезок \mathbf{AB} расположим по действительной оси вправо от точки $(+1)$. Поскольку мы рассматриваем усилитель с паразитными емкостями, будем считать, что $\mathbf{K}(p) \rightarrow \mathbf{D} = 0$ при $|p| \rightarrow \infty$. Эта точка не попадает на отрезок \mathbf{AB} . При $\mathbf{K}(0) > 1$ отрезок \mathbf{AB} пересекается амплитудно-фазовой характеристикой один раз при $\omega = 0$, и, поскольку характеристика симметрична, возможно несколько пар раз при $\omega \neq 0$. Таким образом, общее число пересечений будет нечетным, и в соответствии со сказанным выше усилитель будет неустойчив.

Если $\mathbf{K}(0) < 1$, то $|\mathbf{K}(i\omega)| < 1$, амплитудно-фазовая характеристика не сможет ни разу пересечь отрезок \mathbf{AB} и усилитель будет устойчив.

Пример 7.7

Методом амплитудно-фазовых характеристик найти условие устойчивости усилителя, рассмотренного в примере 7.3.

Решение

Этот усилитель при разомкнутой обратной связи устойчив, так как колебания с его выхода не попадают на вход.

Возьмем точку $\mathbf{A} = +1$, точку $\mathbf{B} = +\infty$ — отрезок \mathbf{AB} вправо от точки $(+1)$ по действительной оси. При $|p| \rightarrow \infty$ $\mathbf{K}(p) \rightarrow \mathbf{D} = -|K_{cp}^3|$, следовательно, точка \mathbf{D} не попадает на отрезок \mathbf{AB} . Найдем пересечения амплитудно-фазовой характеристики с этим отрезком, воспользовавшись

значением $\mathbf{K}(p)$ из примера 7.3. Пересечения могут быть лишь на частотах, при которых

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{i|K_{cp}^3|\tau_n^3\omega^3}{-i\tau_n^3\omega^3 - 3\tau_n^2\omega^2 + i3\tau_n\omega + 1}$$

— действительная величина. Эти частоты определяются из уравнения:

$$-3\tau_n^2\omega^2 + 1 = 0.$$

Они равны

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}\tau_n}.$$

Получается, как и следовало ожидать, парная точка пересечения действительной оси амплитудно-фазовой характеристикой.

Подставляя полученные значения $\omega_{1,2}$ в выражение для $\mathbf{K}(i\omega)$, получим:

$$\mathbf{K}(i\omega_{1,2}) = \frac{|K_{cp}^3|}{8}.$$

Таким образом, при $\frac{|K_{cp}^3|}{8} > 1$ отрезок \mathbf{AB} пересекается характеристикой дважды, причем оба раза в одну сторону (так как точка парная). Поэтому $n_\alpha \neq n_\beta$ и усилитель неустойчив.

При $\frac{|K_{cp}^3|}{8} < 1$ отрезок \mathbf{AB} не пересекается характеристикой ни разу, и усилитель устойчив.

Пример 7.8

Найти условие устойчивости схемы, рассмотренной в примере 7.2 при условии, что $\frac{L}{C_\Pi} \gg r^2$.

Решение

Выберем на основании сказанного выше $\mathbf{A} = -r_i = |r_i|$, $\mathbf{B} = +\infty$ и \mathbf{AB} — вправо по действительной оси.

Правая часть схемы рис. 7.3 является параллельным контуром. Его сопротивление, как известно, при $\frac{L}{C_\Pi} \gg r^2$ активно на частотах $\omega = 0$ и $\omega = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_\Pi}}$. Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика $\mathbf{Z}(p)$ будет пересекать действительную ось при $\omega = 0$ в точке $\mathbf{Z} = r$ и при $\omega = \omega_p$ в точке $\mathbf{Z} = R_{\text{вв}} = \frac{L}{rC_\Pi}$. Исходя из симметрии, можно сказать, что в последней точке характеристика будет пересекать действительную ось и при $\omega = -\omega_p$.

Из условия примера $r^2 \ll \frac{L}{C_\Pi}$. Поэтому $\frac{L}{C_\Pi r} \gg r$ и при $\frac{L}{C_\Pi r} > \mathbf{A} = |r_i| > r$ отрезок \mathbf{AB} пересекается дважды и оба раза в одну сторону, так как точка парная. При $\mathbf{A} = |r_i| < r < \frac{L}{rC_\Pi}$ отрезок \mathbf{AB} пересекается трижды. В обоих случаях $n_\alpha \neq n_\beta$ и схема неустойчива. При $\mathbf{A} = |r_i| > \frac{L}{rC_\Pi}$ отрезок \mathbf{AB} не пересекается ни разу и схема устойчива.